Université Côte d'Azur - M1 IM/MPA - Méthodes numériques stochastiques

CONTRÔLE FINAL – PARTIE SUR MACHINE

Préliminaire. Durée : 1h. Documents autorisés. A la fin de l'examen, vous devez envoyer les codes que vous avez écrits sous la forme d'un fichier `R` unique aux adresses suivantes : `delarue@unice.fr`, `joseph.najnudel@unice.fr`. Indiquez votre nom dans le nom du fichier.

Exercice 1. Pour un entier $N \geq 1$, on considère l'intégrale

$$I_N = \int_0^1 N x^{N-1} \cos(x) dx,$$

dont on admet qu'elle peut être écrite sous la forme suivante :

$$I = \mathbb{E}\big[N U^{N-1} \cos(U)\big], \tag{i}$$

où U est une variable aléatoire de loi uniforme.

(1) Ecrire une fonction `MC` renvoyant l'approximation Monte-Carlo de I_N avec n tirages, l'écart-type empirique associé, ainsi que la largeur et les bornes de l'intervalle de confiance asymptotique de niveau 0,95 lorsque I est représentée à l'aide de (i). On prendra soin de mettre N comme un paramètre de la fonction.

(2) On admet que l'on peut écrire I_N sous la forme

$$I_N = \mathbb{E}\Big[\cos(X_N)\Big], \tag{ii}$$

où X_N est une variable aléatoire de loi de densité $f_N : x \in [0,1] \mapsto N x^{N-1}$.

(a) On admet que la fonction quantile F_N^{-1} de la loi de densité f_N est donnée par $u \in]0,1[\mapsto U^{1/N}$. En déduire une fonction `simu1` permettant de simuler les réalisations de n variables aléatoires indépendantes de loi de densité f_N.

(b) Ecrire un code `R` permettant de vérifier numériquement l'affirmation suivante : "*la loi de X_N est égale à la loi de* $\max(U_1, \cdots, U_N)$*, où $U_1, \cdots, U_N$ sont N variables indépendantes de loi uniforme sur* $]0,1[$." On écrira le code pour une valeur de N arbitraire et on le fera tourner pour $N = 5$. On pourra construire la méthode en deux temps : (a) coder un simulateur de la loi de $\max(U_1, \cdots, U_N)$; (b) mettre en place une vérification graphique avec la loi de densité f_N.

(c) Ecrire une fonction `MC2` renvoyant l'approximation Monte-Carlo de I_N avec n tirages, l'écart-type empirique associé, ainsi que la largeur et les bornes de l'intervalle de confiance asymptotique de niveau 0,95 lorsque I est représentée à l'aide de (ii). On prendra soin de mettre N comme un paramètre de la fonction.

(3) Pour $N = 5$, comparer les valeurs numériques des deux méthodes. Laquelle est préférable ?

Exercice 2. Sur $E = \{1, 2\}$, on considère la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

(1) Construire une fonction `chaine`, dépendant de l'état i dans E, de la matrice de transition P, et d'un instant $n \geq 0$, simulant les $n+1$ premières positions de la chaîne initialisée en i.

(2) On veut vérifier à partir des **seules simulations** que la mesure $\mu = (1/3, 2/3)$ est invariante pour P. Expliquer en commentaire comment utiliser la fonction `chaine` pour cela.